TITLE:

セーフペトリネットによる正規集合の記述の簡潔さについて : 有限オートマトンとの比較 (計算機科学の数学的基礎)

AUTHOR(S):

松浦, 敏雄; 杉山, 裕二; 谷口, 健一; 嵩, 忠雄

CITATION:

松浦, 敏雄 ...[et al]. セーフペトリネットによる正規集合の記述の簡潔さについて : 有限オートマトンとの比較 (計算機科学の数学的基礎). 数理解析研究所講究録 1978, 322: 56-74

ISSUE DATE:

1978-03

URL:

http://hdl.handle.net/2433/104032

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
322巻 1978年 56-74

セーフペトリネットによる正規集合の記述の簡潔さについて ——有限オートマトンとの比較——

阪大　基礎工　松浦敏雄
杉山裕二
谷口健一
嵩　忠雄

1. まえがき

ペトリネットは並列処理プロセスの同期等を簡潔に表現するモデルとして適している．並列処理プロセスにおける各操作や事象は，ペトリネットにおいては*transition*（*t*-節点）に対応し，それによって成された仕事名や事象の種類は，その*t*-節点に付されたラベルで表わされる．この*t*-節点のラベルをアルファベットの1つの記号とみなしたとき，*t*-節点の発火系列に対応するラベル系列の集合としてある種の言語を記述できる．特に，ペトリネットが有界な場合（もちろん，セーフな場合も），記述できる言語は有限オートマトンと同様，正規集合である．

ところで，我々はペトリネットがセーフな場合であっても，

発火系列に対応するラベル系列の集合の等価性，およびラベル付きセーフペトリネットの簡単化の判定問題は，いかなる非決定性チューリング機械を用いても，ペトリネットの記述の長さに対して，指数的領域が必要であることを示した.[(3)]

このことは，これらの問題が有限オートマトンの等価性および簡単化より"複雑な"問題のクラスに属することを示している. このことから逆に，ある種の正規集合Lに対しては有限オートマトンによる記述よりも，セーフペトリネットを用いた方がはるかに簡潔に，すなわち，少ない文字数で表現できることが予想されるが，両者の差の程度は明確にされていなかった.

セーフペトリネットによる正規集合の記述と有限オートマトンによる記述の簡潔さの差異については，*place*（*p*-節点）数nの任意に与えられたセーフペトリネットに対して，同じ正規集合を記述する非決定性（決定性）の有限オートマトンの状態数は2^n（2^{2^n}）あれば十分であることは容易にわかる.

本稿では，*p*-節点数nのセーフペトリネットで記述できる言語で，それを受理するいかなる非決定性（決定性）の有限オートマトンも状態数が2^n（2^{2^n}）のオーダ必要であるような言語が存在することを示している.

2. 諸定義

［定義1］

ペトリネットNは次の4つ組で定義される有向グラフである.

$$N = \langle P,\ T,\ E,\ M_0 \rangle$$

ただし,

(1) $P = \{ p_1, \cdots, p_{|P|} \}$： 有限個の$p$-節点（*place*）の集合.

(2) $T = \{ t_1, \cdots, t_{|T|} \}$： 有限個の$t$-節点（*transition*）の集合.

(3) E： 有限個の有向枝（*arc*）の集合.
各枝はt-節点からp-節点へ，または，p-節点からt-節点へ向かう.

(4) M_0： 初期マーキング（*initial marking*）.
Pから$\underset{\sim}{N}$（非負整数の集合）への写像である.

もし，p-節点pからt-節点t（あるいはt-節点tからp-節点p）への枝があれば，pはt-節点tの入力p-節点（あるいは出力p-節点）という.

［定義2］

マーキングMは，Pから$\underset{\sim}{N}$への写像である. 集合Pは有限

なので，マーキングMを$\underset{\sim}{N}$上の$|P|$次元ベクトル($s_1, \cdots, s_{|P|}$)によって表わすことができる．ここで，第i成分の値s_iは，$M(p_i)$，$p_i \in P$である．

〔定義3〕

ペトリネットを図で表わすときには，p-節点を"○"で，t-節点を"—"で，枝を"→"で表わす．また，マーキングMは各p-節点p_iの中に，$M(p_i)$個のトークン(*token*：図では"•"で示す)置いて表わす．

〔定義4〕

p-節点pからt-節点tへの枝の数を$I_p(t)$で，t-節点tからp-節点pへの枝の数を$O_p(t)$で表わす．t-節点tのすべての入力p-節点pに対して，$M(p) \geq I_p(t)$が成立するようなマーキングMに関して，t-節点tは発火可能(*firable*)であるという．t-節点tが発火(*fire*)すると，すべての入力p-節点pから$I_p(t)$個のトークンが取去られ，すべての出力p-節点pに$O_p(t)$個のトークンが加えられる．マーキングMからt-節点tの発火によって得られるマーキングをM'とするとき，$M \xrightarrow{t} M'$と書く．

〔定義5〕

Tの中の記号を重複を許して任意に有限個連接して得られる系列全体の集合をT^*で表わし，0個の記号の系列をλで，任意の系列wをi回反復して得られる系列を$(w)^i$で表わす．

〔定義6〕

マーキングMからマーキングM'への発火系列（*firing sequence*）σtを次のように帰納的に定義する．ただし，$\sigma \in T^*$，$t \in T$，$\underset{\sim}{N}^{|P|}$は$\underset{\sim}{N}$上の$|P|$次元ベクトルの集合である．

$$M \xrightarrow{\sigma t} M' \triangleq \exists M'' \in \underset{\sim}{N}^{|P|} \left[M \xrightarrow{\sigma} M'' \ \& \ M'' \xrightarrow{t} M' \right]$$

また，$M \xrightarrow{\lambda} M$ とする．

〔定義7〕

$M \xrightarrow{\sigma} M'$なる発火系列$\sigma$（$\sigma \in T^*$）が存在するとき，マーキングM'はマーキングMから到達可能（*reachable*）であるという．

〔定義8〕

ペトリネット$N = \langle P, T, E, M_0 \rangle$における発火系列集合F(N)を次のように定義する．

$$F(N)=\{\sigma\in T^* \mid {}^{\exists}M\in \underset{\sim}{N}^{|P|},\ M_0 \xrightarrow{\sigma} M\}$$

また，特にNにおけるマーキングM_f への発火系列集合$F(N, M_f)$を次のように定義する.

$$F(N, M_f)=\{\sigma\in T^* \mid M_0 \xrightarrow{\sigma} M_f\}$$

〔定義9〕

t-節点にラベルを付けるとき，t-節点tに対応するラベルを$L(t)$，発火系列σに対応するラベル系列を$L(\sigma)$で表わす．また，発火系列の集合Fに対応するラベル系列集合L(F)を次のように定義する.

$$L(F)=\{L(\sigma) \mid \sigma\in F\}$$

〔定義10〕

ペトリネット$N=\langle P, T, E, M_0\rangle$において，$p$-節点$p_i$がセーフであるとは，初期マーキング$M_0$から到達可能なすべてのマーキングMに対して，$M(p_i)\leq 1$が成立することである．Pに属するすべての$p$-節点がセーフであるとき，ペトリネットNはセーフであるという.

以下，本稿で取扱うペトリネットはセーフであり，すべてのp-節点p，t-節点tに対して，$I_p(t)\leq 1$，$O_p(t)\leq 1$である

ものとする．従って，マーキングをトークンの置かれたp-節点全体の集合で表わすこともある．また，枝をp-節点とt-節点の順序対で表わす．

また，ペトリネット$N=\langle P, T, E, M_0\rangle$において，$N$の記述の長さを$|N|$で表わし，$p$-節点数，$t$-節点数，枝数の和$|P|+|T|+|E|$ をNのサイズという．

3. 問題および本稿で示す結果

状態数nの任意の非決定性有限オートマトン（以下，NFAと略す）が受理するいかなる言語も状態数が2^nあれば決定性の有限オートマトン（以下，DFAと略す）で受理できることは，よく知られているが，F. R. Moore (4)によって，次に示す補題1が示されている．以下に示す状態数nのNFA B_n（図1参照）によって受理される言語を$\mathcal{L}_n$とする．(注1)

$$B_n=\langle S, \Sigma, \delta, 1, \{n\}\rangle$$

ただし，$S=\{1, 2, \cdots, n\}$ ： 状態の集合，

$\Sigma=\{a, b\}$ ： 入力アルファベットの集合，

δ ： 遷移関数

$\delta(i, a)=\{i+1\}$ $\quad i=1, 2, \cdots, n-1$

$\delta(n, a)=\{1, 2\}$

$\delta(1, b)=\{1\}$

$\delta(i,\ b) = \{\,i+1\,\}$　　　　$i = 2, 3, \cdots, n-1$

$\delta(n,\ b) = \emptyset$

1 :　初期状態

$\{n\}$:　最終状態

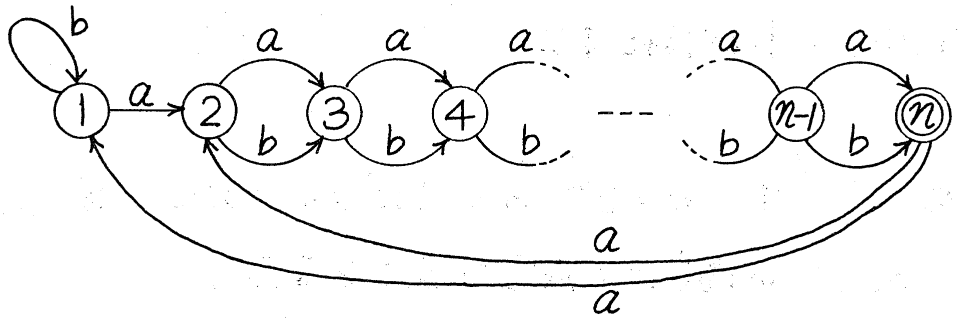

図1. NFA　Bn の状態遷移図

(注1):　$\mathcal{L}n$ は正規表現によって次のように表わされる.

$$\mathcal{L}n = b^{*}a(\underbrace{(a+b)\cdots\cdots(a+b)}_{(n-2)\text{回}})^{*}\underbrace{(a+b)\cdots\cdots(a+b)}_{(n-2)\text{回}}$$

〔補題1〕

任意の正整数 n に対して，NFA　Bnは $\mathcal{L}n$ を受理するNFAの中で状態数最小であり，$\mathcal{L}n$ を受理するいかなるDFAも 2^n の状態数が必要である.　□

補題1では，同じ正規集合を受理するDFAとNFAの記述の簡潔さのちがいを示しているが，次の補題2では，NFAとラベル付きセーフペトリネットの記述の簡潔さのちがいを示し

ている.

〔補題2〕

任意のnに対して，$\mathcal{L}_n$ を最終マーキングに至る発火系列に対応するラベル系列集合として持つサイズ$O(\lceil \log n \rceil)$のセーフペトリネットが存在する. □

（証明） まず，$n=2^m$ のときについて示し，後でnが2のベキ乗でない場合にも成立することを示す.

$n=2^m$ のとき，次に示すペトリネットN_mはセーフであり，$\mathcal{L}_n$ を最終マーキングM_{fm}に至る発火系列に対応するラベル系列集合として持つことを示す.

$$N_m = < P_m, T_m, E_m, M_{om} >$$

ただし，

$$P_m = \{p_0, p_1, \cdots, p_m\} \cup \{q_1, \cdots, q_{m-1}\} \cup \{\overline{q_1}, \cdots, \overline{q_{m-1}}\}$$

$$T_m = \{t_{ij} \mid 1 \le i \le m-1, 1 \le j \le 4\} \cup \{t_{01}, t_{02}, t_{m1}, t_{m2}\}$$

$$\begin{aligned}
E_m = &\{(p_i, t_{ij}) \mid 1 \le i \le m-1, \ 1 \le j \le 4\} \\
&\cup \{(\overline{q_i}, t_{ij}) \mid 1 \le i \le m-1, \ 1 \le j \le 2\} \\
&\cup \{(q_i, t_{ij}) \mid 1 \le i \le m-1, \ 3 \le j \le 4\} \\
&\cup \{(t_{ij}, q_i) \mid 1 \le i \le m-1, \ 1 \le j \le 2\} \\
&\cup \{(t_{ij}, \overline{q_i}) \mid 1 \le i \le m-1, \ 3 \le j \le 4\} \\
&\cup \{(t_{ij}, p_1) \mid 1 \le i \le m-1, \ 1 \le j \le 2\}
\end{aligned}$$

$\cup\{(t_{ij}, p_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq m-1,\ \ 3 \leq j \leq 4\}$

$\cup\{(p_0, t_{01}), (t_{01}, p_0), (p_0, t_{02}), (t_{02}, p_1),$

$(p_m, t_{m1}), (t_{m1}, p_0), (p_m, t_{m2}), (t_{m2}, p_1)\}$

$M_{0m} = \{p_0, \overline{g_1}, \overline{g_2}, \cdots, \overline{g_{m-1}}\}$

$M_{fm} = \{p_m, \overline{g_1}, \overline{g_2}, \cdots, \overline{g_{m-1}}\}$

各t-節点へのラベルの付け方は，t_{i2}, t_{i4} $(1 \leq i \leq m-1)$，およびt_{01}に対してラベルbを付け，その他のt-節点には，すべてラベルaを付ける．（図2参照）

まず，初期マーキングM_{0m}より到達可能なすべてのマーキングにおいて，次の3つの性質が満たされることを示そう．

性質1：すべてのi $(1 \leq i \leq m-1)$に対して，g_iと$\overline{g_i}$のどちらか一方にトークンが1つだけ存在する．

性質2：M_{0m}を除く到達可能なすべてのマーキングにおいて，p-節点$p_1, \cdots, p_m$のうちの唯一つのp-節点にトークンが1つだけ存在し，p_0にトークンが入り得るのは，M_{0m}のみである．

性質3：p-節点p_i $(1 \leq i \leq m)$にトークンがあるとき，$1 \leq j < i$なるすべてのjについて，g_jにはトークンがなく，$\overline{g_j}$に1つだけ存在する．

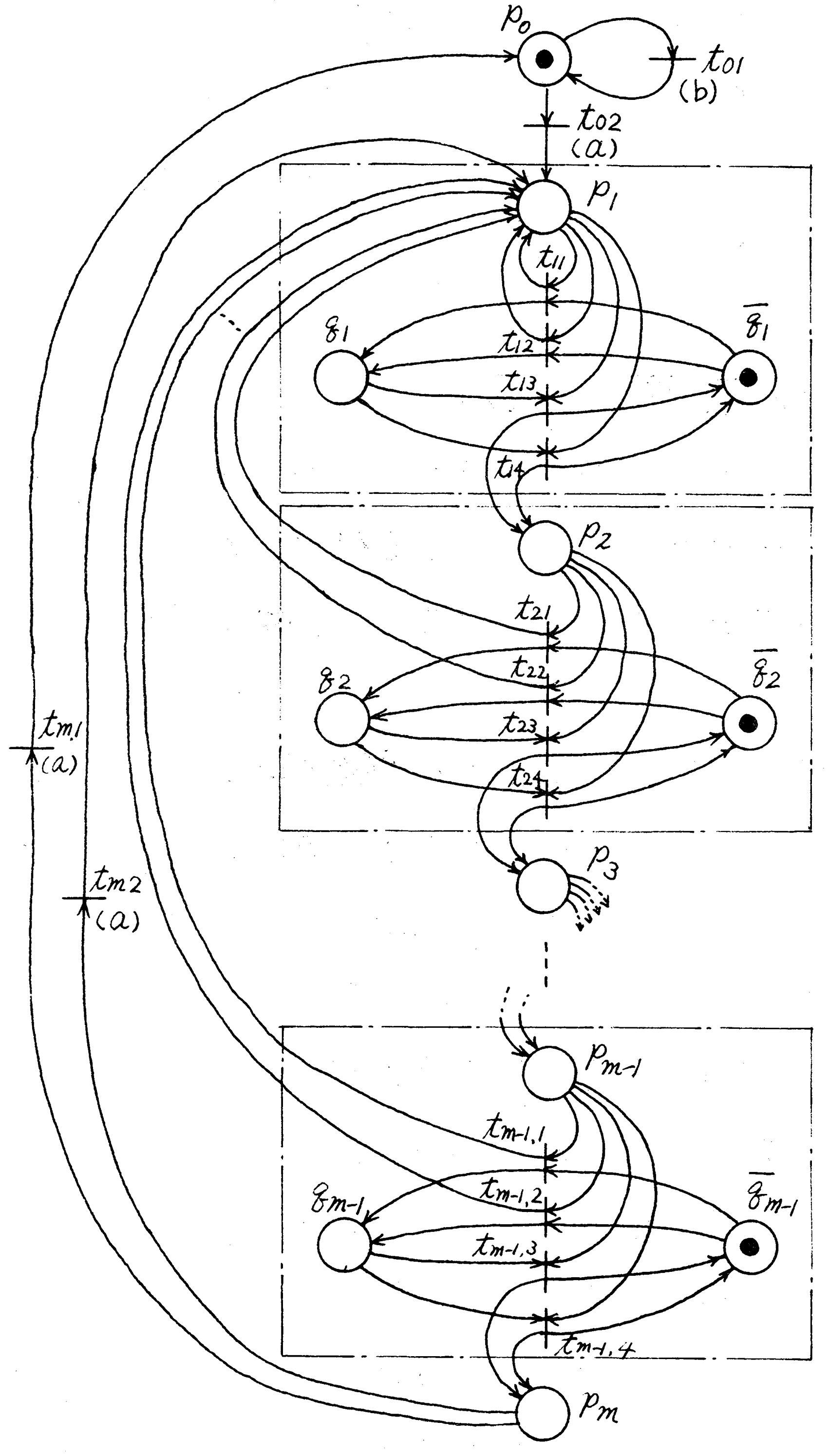

図2. セーフペトリネット Nm

初期マーキングMomにおいて，性質1，2，3 を満たすのは明らかである．Momにおいて発火可能なt-節点はt_{01}，t_{02} のみであり，これらのt-節点の発火後も性質1，2，3 を満たす．

いま，k回以下の発火可能なt-節点の発火によって得られるすべてのマーキングについて，性質1，2，3が満たされているものとする．ここで，すべてのt-節点のそれぞれについて，$(k+1)$回目のt-節点として発火したときを考える．(イ)t-節点t_{i1}（ラベルa）またはt_{i2}（ラベルb）（$1\leq i\leq m-1$）が発火したとき，1つのトークンがp_iからp_1へ移され，かつ同時に，$\bar{q}_i$からq_iへ移される．従って仮定と考えあわせて，発火後のマーキングにおいても性質1，2，3が満たされる．(ロ)t-節点t_{i3}（ラベルa）またはt_{i4}（ラベルb）（$1\leq i\leq m-1$）が発火したとき，1つのトークンがp_iからp_{i+1}へ，同時に，q_iから$\bar{q}_i$へ移される．よって，この場合も性質1，2，3が満たされる．(ハ)t-節点t_{01}またはt_{02}が発火した場合，1つのトークンがp_0からp_0，またはp_0からp_1へ移されるだけであり，明らかに性質1，2，3が満たされる．(ニ)最後に，t-節点t_{m1}，t_{m2}が発火するときを考える．これらのt-節点はp-節点p_mにトークンが存在するときにのみ発火可能である．ところが仮定より，これらのt-節点の発火前において，性質1，2，3が満たされており，これらの性質を満たし，かつ，p-節点p_mにト

ークンが存在するマーキングは最終マーキングM_{fm}に限られる．ここで，t-節点t_{m1}が発火すると初期マーキングM_0となり，性質1, 2, 3が満たされ，t-節点t_{m2}の発火後もこれらの性質が満たされる．

従って，到達可能なすべてのマーキングにおいて性質1, 2, 3が満たされる．性質1, 2より，ただちにペトリネットN_mがセーフであることがわかる．

以下，NFA B_nの各状態とN_mの到達可能なマーキングとの対応を示すために，N_mの各マーキングMに対し，Mの重みW(M)を次のように定義する．

$$W(M)=\sum_{r\in M} w(r)$$

ただし，$w(r)$はp-節点rに対応する非負整数で，N_mにおいて，次のように定義する．

$$w(p_i)=2^i \qquad (0\le i\le m)$$

$$w(g_i)=2^i-1 \qquad (1\le i\le m-1)$$

$$w(\bar{g}_i)=0 \qquad (1\le i\le m-1)$$

すなわち，W(M)はMにおいてトークンの存在するp-節点rに対する$w(r)$の和である．

次に，N_mの到達可能なマーキングに対して，次の性質4も成立することを示そう．

性質4：　$1 \leq k \leq 2^m$ なる各 k について，重み k の到達可能なマーキングがただ1つ存在する．逆に到達可能な任意のマーキング M に対して，$1 \leq W(M) \leq 2^m$ が満たされる．

まず，$1 \leq k \leq 2^m$ なる各 k について，重み k の到達可能なマーキング M_k が少くとも1つ存在することを示す．

定義より明らかに $W(M_{0m})=1$ が成立つ（$M_{0m}=M_1$ とおく）．M_{0m} において，ラベル a の t-節点 t_{02} とラベル b の t-節点 t_{01} のみが発火可能であり，t_{02} の発火後のマーキングを M_2 とすれば $W(M_2)=2$ となり，t_{01} の発火後のマーキングは M_{0m} のままである．

いま，重みが k（ただし，$2 \leq k < 2^m$）のあるマーキング M_k が到達可能であると仮定する．

マーキング M_k において，$W(M_k)<2^m$ だから p-節点 p_m にはトークンが存在しない．また，$M_k \neq M_{0m}$ だから性質2より，p-節点 p_0 にもトークンが存在しない．よって，性質1, 2, 3より M_k において発火可能な t-節点は，p-節点 $p_1, \cdots, p_{m-1}$ の中のトークンの存在する p-節点 p_j に対して，t_{j1}（ラベル a）と t_{j2}（ラベル b）の場合と，t_{j3}（ラベル a）と t_{j4}（ラベル b）の場合がある．いずれの場合も発火可能なラベル a, b の t-節点が1つずつ存在し，前者の場合，t_{j1} または t_{j2} の発火によって，p-節点 p_j および $\overline{q_j}$ から1つのトークンが取去られ，p節点 p_1 および q_j に1つのトークンが付加される．このときのマーキングを M_{k+1} とすれば（t_{j1} と t_{j2} の発火後のマーキングは一致する），$W(M_{k+1}) = W(M_k) - w(p_j) - w(\overline{q_j}) + w(p_1) + w(q_j) = W(M_k) - 2^j - 0 + 2 + (2^j - 1) = W(M_k) + 1 = k + 1$ となる．後者の場合，t_{j3} または t_{j4} の発火によって得られるマーキングを M_{k+1}（t_{j3} と t_{j4} の発火後のマーキングは一致する）とすれば，同様にして，$W(M_{k+1}) = W(M_k) - w(p_j) - w(q_j) + w(p_{j+1}) + w(\overline{q_j}) = W(M_k) - 2^j - (2^j - 1) + 2^{j+1} + 0 = W(M_k) + 1 = k + 1$．

従って，いずれの場合も，M_k においてラベル a，b の t-節点が1つずつ発火可能であり，これらの t-節点の発火後のマーキング M_{k+1} において，$W(M_{k+1}) = k + 1$ が成立し，M_k からは M_{k+1} 以外のマーキングには移り得ない．以上のことから，1から 2^m までの各重みについて，その重みを持つ到達可能なマーキングが存在する．

次に，性質1,2,3を満たすマーキングの個数を調べよう．M_{0m} 以外で，これらの性質を満たし，p-節点 p_l $(1 \le l \le m)$ にトークンが存在するマーキングは 2^{m-l} 通りある．従って，

N_m において，性質1，2，3を満たすマーキングは M_{0m} も含めて，全部で $\sum_{\ell=1}^{m} 2^{m-\ell}+1=2^m$ 通り存在する．到達可能なマーキングは，性質1，2，3を満たすから，2^m 通り以下しか存在しない．従って，前述のマーキング $M_1, \cdots, M_{2^m}$ 以外には到達可能なマーキングは存在しない．以上のことから性質4が満たされる．

到達可能な各マーキング M に対して，B_n の状態 $W(M)$ を対応させる．初期マーキング M_{0m}，最終マーキング M_{fm} はそれぞれ B_n の初期状態1，最終状態 $n(=2^m)$ に対応する．以下，B_n の任意の状態 k，および各 σ $(\sigma \in \{a, b\})$ に対して，$\delta(k, \sigma)=k'$ のとき，かつそのときに限り，ラベル σ を持つ t-節点 t が存在し，$M_k \xrightarrow{t} M_{k'}$ となることを示そう．

性質4の証明の過程で M_{0m}，M_2，$M_3, \cdots, M_{2^m-1}$ において，発火可能なラベル a（または b）の t-節点の発火によって得られるマーキングと，B_n の状態1，2，$\cdots, 2^m-1$ より入力 a（または b）で遷移する状態とが1対1に対応していることが容易にわかる．

また，性質4より，$W(M_{2^m})=2^m$ である．一方定義より $W(M_{fm})=2^m$ だから，$M_{2^m}=M_{fm}$ であることがわかる．M_{fm} においては，ラベル a の t-節点 t_{m1} と t_{m2} のみが発火可

能であり，これらのt-節点の発火後のマーキングはそれぞれ M_{0m}，M_2 であることがわかる．よって，これらのt-節点の発火は，B_n の最終状態からの遷移と対応する．

以上のことから，N_m および M_{fm} によって得られる発火系列に対応するラベル系列の集合 $L(F(N_m, M_{fm}))$ はNFA B_n が受理する正規集合 $\mathcal{L}_n$ に等しい．N_m において，p-節点数 $3m-1$，t-節点数 $4m$，枝数 $16m-8$ であるから，N_m のサイズは $23m-9$ となる．ここで，$m=\log_2 n$ だから，N_m のサイズは $O(\log_2 n)$ である．

以上の議論は n が2のベキ乗としているが，n が任意の正整数のときは，次のようにして $O(\lceil \log_2 n \rceil)$ であることがわかる．$m=\lceil \log_2 n \rceil$ とし，セーフペトリネット N_m を構成し，N_m の2つのt-節点 t_{02}，t_{m2} の発火後のマーキングを，重み 2^m-n+2 の性質1, 2, 3を満たすマーキング M_{2^m-n+2} へ遷移するように，これらのt-節点から出射する枝を修正する．ここで，最悪の場合 N_m のサイズは $(2m-2)$ 増加し，合計して $25m-11$ となる．従って，N_m のサイズは $O(\lceil \log_2 n \rceil)$ である．□

補題1，2より次の定理が導かれる．

〔定理3〕

任意の正整数nに対して，次のようなp-節点数n（枝数はnに比例）のセーフペトリネットNとその最終マーキングM_fが存在する．ある定数C（$C>0$）が存在し，ラベル系列集合$L(F(N,M_f))$を受理するどのような非決定性有限オートマトン，決定性有限オートマトンも，それぞれ，状態数が少くとも$2^{c(n-1)}$，$2^{2^{c(n-1)}}$必要である．

（証明）　与えられたnに対して，$3m+2 \geq n \geq 3m-1$を満たすm，すなわち，$m=(n+1-\alpha)/3$（ただし，$\alpha \in \{0,1,2\}$）を考える．このmに対して，セーフペトリネットN_mおよびその最終マーキングM_{fm}を補題2のように構成する．補題2より，$L(F(N_m, M_{fm}))$を受理するいかなるNFAも少なくとも$2^m = 2^{(n+1-\alpha)/3} \geq 2^{(n-1)/3}$の状態数が必要であることがわかる．さらに補題1より，$L(F(N_m, M_{fm}))$を受理するいかなるDFAも少なくとも$2^{2^{(n-1)/3}}$の状態数が必要であることがわかる．

□

参考文献

(1)　杉山，荒木，谷口，嵩："ペトリネットの発火系列に関する判定問題の複雑さ"，昭51年夏期L.A.シンポジウム予

稿(1976-7).

(2) 嵩, 荒木: "Petri Net の Reachability に関する二, 三の問題", 信学会オートマトンと言語研資 AL 75-12 (1975-6).

(3) 松浦, 杉山, 谷口, 嵩: "セーフペトリネットの等価性と簡単化に関する判定問題の複雑さ", 信学会オートマトンと言語研資 AL77-67 (1978-1).

(4) F. R. Moore: " On the Bounds for State-Set Size in the Proofs of Equivarence Between Deterministic, Nondeterministic, and Two-Way Finite Automata," IEEE Transactions on Computers, (October 1971).

(5) N. D. Jones, L. H. Landweber and Y. E. Lien: " Complexity of some problems in Petri nets," Theoretical Computer Science, Vol.4, No.3, pp.277-299 (1977).

(6) A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman: " The Design and Analysis of Computer Algorithms," Addison-Wesley (1974).

(7) L. J. Stockmeyer and A. R. Meyer: " Word problems requiring exponential time," 5th Annual Symposium on Theory of Computing (1973).